INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1980. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTA.

1° On rappelle qu'une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^k sur $[a, b]$ si elle admet sur $[a, b]$ des dérivées *continues* jusqu'à l'ordre k inclusivement.

2° Les candidats qui ne parviendraient pas à résoudre correctement les questions 3°, 4° et 5° pourront admettre les résultats indiqués dans l'énoncé, de façon à pouvoir aborder l'étude des questions 6° à 9°.

Tournez la page S. V. P.

1° Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $[a, b]$, *vérifiant* $f(a) = f(b) = 0$. Soit x un élément de $[a, b]$. Montrer qu'il existe au moins un réel c_x appartenant à $]a, b[$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x).$$

On ne demande pas d'examiner l'unicité éventuelle de c_x.

On pourra pour cela raisonner de la façon suivante : dans le cas où $a < x < b$, on posera, pour tout t élément de $[a, b]$,

$$\Phi_x(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b),$$

et on déterminera le réel A de façon que $\Phi_x(x) = 0$.

2° Dans cette question, et dans toute la suite du problème, on suppose toujours que f est de classe C^2 sur $[a, b]$. On pose $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ et on suppose que $M > 0$, ce qui revient à supposer que f n'est pas une application affine.

De plus, dans cette question et dans les questions 3°, 4° et 5°, $f(a) = f(b) = 0$

Montrer que, pour tout x élément de $[a, b]$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{M(x-a)(b-x)}{2},$$

et en déduire que :

$$|f'(a)| \leqslant \frac{M(b-a)}{2}$$

et :

$$|f'(b)| \leqslant \frac{M(b-a)}{2}.$$

3° Les hypothèses sur f sont celles du 2°.

Montrer que, s'il existe un réel x_0 élément de $]a, b[$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{M(x_0-a)(x_0-b)}{2}.$$

.../...

E.N.S.A.E. 1980 I 1147

alors :

$$f(x) = \frac{M(x-a)(x-b)}{2},$$

pour tout x appartenant à $[a, b]$.

Que peut-on dire d'analogue s'il existe un réel x_0 élément de $]a, b[$ tel que :

$$f(x_0) = -\frac{M(x_0-a)(x_0-b)}{2} ?$$

4° Les hypothèses sur f sont celles du 2°.

Montrer que si :

$$f'(a) = -\frac{M(b-a)}{2},$$

alors :

$$f(x) = \frac{M(x-a)(x-b)}{2},$$

pour tout x élément de $[a, b]$.

On pourra, pour cela, raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel x_0 de $[a, b]$ tel que $f''(x_0) = M-h$, h étant strictement positif. On montrera tout d'abord l'existence de deux réels c, d vérifiant $a < c < d < b$ et tels que :

$$x \in [c, d] \Rightarrow f''(x) \leqslant M - \frac{h}{2}.$$

On prouvera ensuite que ce résultat contredirait l'égalité $f(b) - f(a) = 0$.

5° Les hypothèses sur f sont toujours celles du 2°.

a. Montrer que pour tout x élément de $]a, b[$, on a :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M(b-a)}{2}.$$

Pour cela, on pourra poser, pour t appartenant à $[a, b]$,

$$\varphi_x(t) = f(t) - \frac{f(x)(t-a)}{x-a}.$$

et étudier $\varphi_x(t)$ sur $[a, x]$.

b. Montrer ensuite que pour tout x élément de $]a, b]$ on a l'inégalité *stricte :*

$$|f'(x)| < \frac{M(b-a)}{2}.$$

Pour obtenir ce résultat plus difficile, on pourra raisonner par l'absurde, en supposant, par exemple, que $f'(x) = \frac{M(b-a)}{2}$, x désignant un élément de $]a, b[$, et introduire, outre l'application φ_x définie au 5° *a.*, une deuxième application ψ_x définie par :

$$\psi_x(t) = f(t) - \frac{f(x)(t-b)}{x-b}.$$

6° Dans cette question, et jusqu'à la fin du problème, f est toujours supposée de classe C^2 sur $(a, b]$, *mais on ne suppose plus que* $f(a) = f(b) = 0$. On pose encore $\sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| = M$ et on suppose toujours $M > 0$.

Calculer les réels α et β en fonction de a, b, $f(a)$, $f(b)$ de façon que l'on ait, si :

$$\Phi(x) = f(x) - (\alpha x + \beta),$$

les égalités :

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0.$$

En déduire les résultats suivants :

a. Il existe deux trinômes du second degré, tels que $T_1(a) = T_2(a)$ et $T_1(b) = T_2(b)$, vérifiant pour tout x réel les égalités :

$$T''_1(x) = M, \quad T''_2(x) = -M,$$

et tels que, pour tout x élément de $[a, b]$:

$$T_1(x) \leqslant f(x) \leqslant T_2(x).$$

Expliciter T_1 et T_2.

b. S'il existe x_0 appartenant à $]a, b[$ tel que :

$$f(x_0) = T_1(x_0),$$

alors, pour tout x élément de $[a, b]$, $f(x) = T_1(x)$; un résultat analogue, que l'on énoncera, est obtenu s'il existe x_0 appartenant à $]a, b[$ tel que $f(x_0) = T_2(x_0)$.

Tournez la page S. V. P.

1948

c. On a l'encadrement :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{M}{2}(b-a)\leqslant f'(x)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\frac{M}{2}(b-a),$$

pour tout x élément de $[a, b]$.

Que peut-on énoncer lorsque :

$$f'(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{M}{2}(b-a),$$

et dans trois autres cas analogues au précédent?

d. Si x appartient à $]a, b[$, on a l'encadrement *strict :*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{M}{2}(b-a)<f'(x)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\frac{M}{2}(b-a).$$

7° Dans cette question $f(a)>0$ et $f(b)>0$. Les autres hypothèses sont celles de la question 6°. Les trinômes T_1 et T_2 ont été définis au 6°.

Puisque $T_1(x)\leqslant f(x)$ sur $[a, b]$, une condition suffisante pour que $f(x)>0$ pour tout x élément de $[a, b]$ est évidemment que $T_1(x)>0$ pour tout x élément de $[a, b]$.

En cherchant à quelle condition, nécessaire et suffisante, on a $T_1(x)>0$ sur $[a, b]$, donner une condition suffisante (C) pour que $f(x)>0$ sur $[a, b]$. On montrera que (C) peut s'écrire :

$$M<A\,[a, b, f(a), f(b)],$$

A étant une fonction simple que l'on explicitera.

En étudiant le contre-exemple défini par :

$$f(x)=2+\cos(x),\qquad a=0,\qquad b=2\pi,$$

vérifier que la condition suffisante (C) n'est pas une condition nécessaire.

Si maintenant on suppose que $f(a)<0$ et $f(b)<0$, donner de même une condition suffisante pour que $f(x)<0$ sur $[a, b]$.

8° On suppose ici que $f(a)=0$, $f(b)>0$. Les autres hypothèses sont celles de la question 6°.

En raisonnant comme dans la question 7°, donner une condition suffisante (C') pour que $f(x)>0$ pour tout x appartenant à $]a, b]$.

Suite ⟶

En étudiant le contre-exemple défini par :

$$f(x)=\sin x,\qquad a=0,\qquad b=\frac{\pi}{2},$$

vérifier que (C') n'est pas une condition nécessaire.

On suppose que (C') est vérifiée. Montrer que $f'(a)\geqslant 0$ en utilisant la question 6° c.

Était-ce prévisible?

Quels résultats analogues aux précédents peut-on énoncer :

- si $f(a)>0$, $f(b)=0$;
- si $f(a)=0$, $f(b)<0$;
- si $f(a)<0$, $f(b)=0$?

9° On suppose ici $f(a)=0$, $f(b)>0$; de plus, la condition (C') de la question 8° est supposée vérifiée et enfin $f'(a)=0$.

Quelle est alors nécessairement l'application f?

Indiquer les résultats analogues obtenus en remplaçant les hypothèses :

$$f(a)=0,\ f(b)>0,\ f'(a)=0$$

- par $f(a)=0$, $f(b)<0$, $f'(a)=0$;
- par $f(a)>0$, $f(b)=0$, $f'(b)=0$;
- par $f(a)<0$, $f(b)=0$, $f'(b)=0$?

Il est précisé que, dans ces trois derniers cas, la condition (C') sera convenablement modifiée, comme indiqué à la fin de la question 8°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail